№1-дәріс.

АЛҒАШҚЫ ФУНКЦИЯ ЖӘНЕ АНЫҚТАЛМАҒАН ИНТЕГРАЛ.

Тақырыбы: Анықталмаған интеграл, оның қасиеттері. Негізгі интегралдар формулаларының кестесі. Тікелей интегралдау.

1. Алғашқы функция. Анықталмаған интегралдар және оның қасиеттері.

Дифференциалға кері амал интегралдау амалы.

Анықтама 1. F(x) функциясы $f(x)$ функциясының (a,b) интервалындағы алғашқы функциясы деп аталады, егер кез келген $x \in (a,b)$ үшін $F'(x) = f(x)$ теңдігі орындалса.

Мысалы, $y = x^2, x \in R$ функциясының алғашқы функциясы

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^3}{3}, \text{ себебі}$$

$$F'(x) = \left(\frac{x^3}{3}\right)' = x^2 = f(x).$$

Сонымен қатар, осы берілген функцияның алғашқы функциясы мына төмендегі функциялардың кез келгені

$$\mathrm{F}(x) = \frac{x^3}{3} + C,$$

мұндағы С – тұрақты сан, себебі $F'(x) = \left(\frac{x^3}{3} + C\right)' = x^2 = f(x) \quad (x \in R).$

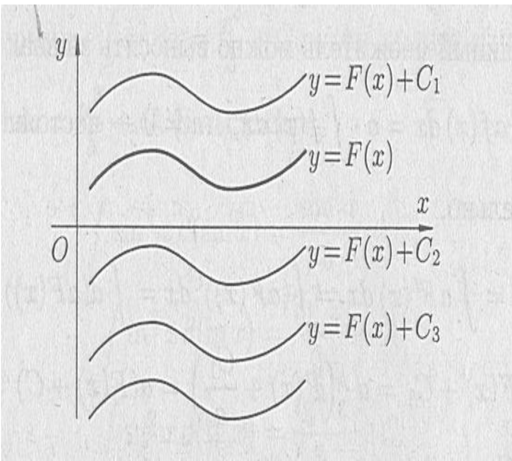
Теорема 1. Егер $F(x)$ функциясы $f(x)$ функциясының (a,b) интервалындағы алғашқы функциясы болса, онда $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының жиыны $F(x) + C$ формуласымен беріледі, мұндағы С – тұрақты сан.

Анықтама 2. $f(x)$ функциясының барлық алғашқы функцияларының $F(x)+C$ жиыны $f(x)$ функциясының анықталмаған интегралы деп аталады және былай белгіленеді: $\int f(x)\,dx$.

$f(x)$ функциясы интеграл астындағы функция деп аталады, ал $f(x)\,dx$ - интеграл астындағы өрнек, x - интегралдау айнымалысы, $\int$ - анықталмаған интеграл белгісі деп аталады.

Функцияның анықталмаған интегралын табу амалы осы функцияны интегралдау деп аталады.

Геометриялық тұрғыдан, анықталмаған интеграл $y = F(x) + C$ қисықтарының жиынтығы (әрбір С-ның сандық мәніне анықталған қисықтар жиынтығы сәйкес келеді) (сурет 22). Әрбір алғашқы функцияның (қисықтың) графигі интегралдық қисық деп аталады.



Сурет 22

Анықталмаған интегралдың қасиеттері:

1. Анықталмаған интегралдың дифференциалы интеграл астындағы өрнекке тең, ал анықталмаған интегралдың туындысы интеграл астындағы функцияға тең:

$$d\left(\int f(x)\,dx\right)= f(x)\,dx$$

2. Қандай да функцияның дифференцалынан алынған анықталмаған интеграл осы функция мен кез келген тұрақты санның көбейтіндісіне тең:

$$\int dF(x) = F(x)+C.$$

3. Тұрақты көбейткішті интеграл белгісінің алдына шығаруға болады:

$$\int a\,f(x)\,dx = a\int f(x)\,dx, \quad a\neq 0$$ - тұрақты сан.

4. Үзіліссіз функциялардың алгебралық қосындылардан алынған анықталмаған интеграл жеке қосылғыштардан алынған интегралға тең:

$$\int \left(f(x)\pm g(x)\right)dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx .$$

5. Егер $\int f(x)dx = F(x)+C$, онда $\int f(u)\,du = F(u)+C$, мұндағы $u=\varphi(x)$ - үзіліссіз туындысы бар кез келген функция.

Сонымен, анықталмаған интегралдың формуласы интегралдау айнымалысы тәуелсіз айнымалы болса да, үзіліссіз туындысы бар осы айнымалыға тәуелді функция болса да ақиқат (интегралдаудың инварианттылық формуласы).

2. Негізгі интегралдар кестесі.

Дифференциалдық есептеулердің негізгі формулаларынан шығатын интегралдар кестесін қарастырамыз:

1. $\int u^{\alpha}\,du = \dfrac{u^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C \quad (\alpha \neq -1) \quad \left(\int du = u + C\right)$;

2. $\int \dfrac{du}{u} = \ln|u| + C$; 3. $\int a^{u}\,du = \dfrac{a^{u}}{\ln a} + C$;

4. $\int e^{u}\,du = e^{u} + C$;

5. $\int \sin u\,du = -\cos u + C \quad \left(\int sh\,u\,du = ch\,u + C\right)$;

6. $\int \cos u\,du = \sin u + C \quad \left(\int ch\,u\,du = sh\,u + C\right)$;

7. $\int tg\,u\,du = -\ln|\cos u| + C$; 8. $\int ctg\,u\,du = \ln|\sin u| + C$;

9. $\int \dfrac{du}{\cos^{2} u} = tg\,u + C \quad \left(\int \dfrac{du}{ch^{2} u} = th\,u + C\right)$;

10. $\int \dfrac{du}{\sin^{2} u} = -ctg\,u + C \quad \left(\int \dfrac{du}{sh^{2} u} = -cth\,u + C\right)$;

11. $\int \dfrac{du}{\sin u} = \ln\left|tg\,\dfrac{u}{2}\right| + C$; 12. $\int \dfrac{du}{\cos u} = \ln\left|tg\left(\dfrac{u}{2} + \dfrac{\Pi}{4}\right)\right| + C$;

13. $\int \dfrac{du}{\sqrt{u^{2}+a^{2}}} = \ln\left|u + \sqrt{u^{2}+a^{2}}\right| + C$;

14. $\int \dfrac{du}{\sqrt{a^{2}-u^{2}}} = \arcsin\dfrac{u}{a} + C$;

15. $\int \dfrac{du}{a^{2}+u^{2}} = \dfrac{1}{a}\,arctg\,\dfrac{u}{a} + C$;

16. $\int \dfrac{du}{a^{2}-u^{2}} = \dfrac{1}{2a}\cdot\ln\left|\dfrac{a+u}{a-u}\right| + C$;

17. $\int \sqrt{a^{2}-u^{2}}\,du = \dfrac{u}{2}\cdot\sqrt{a^{2}-u^{2}} + \dfrac{a^{2}}{2}\arcsin\dfrac{u}{a} + C$;

18. $\int \sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\,du = \dfrac{u}{2}\cdot\sqrt{u^{2}\pm a^{2}} \pm \dfrac{a^{2}}{2}\ln\left|u + \sqrt{u^{2}\pm a^{2}}\right| + C$.